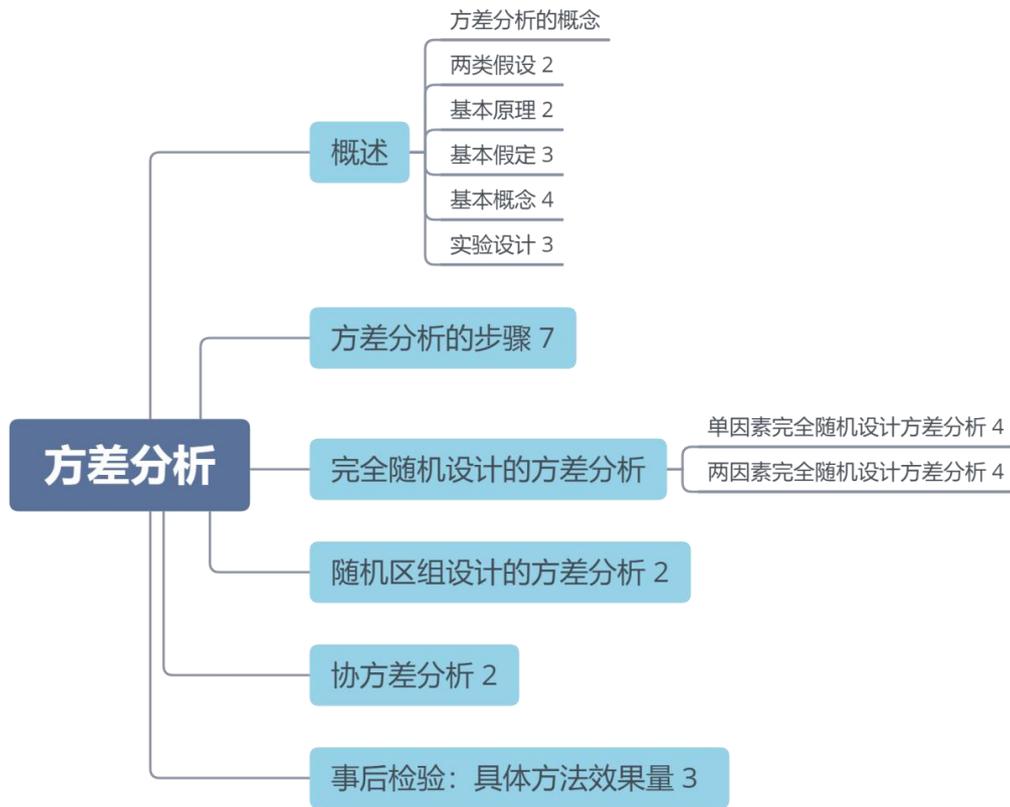


## 第九章 方差分析



### 一、概述

#### (一) 方差分析的概念

方差分析又称作变异分析,其主要功能在于分析实验数据中不同来源的变异对总变异贡献的大小,从而确定实验中自变量是否对因变量有重要影响。

方差分析的目的是推断多组资料总体均数是否相同,即检验多组数据之间的差异是否有统计意义。

#### (二) 两类假设

以三个平均数的差异检验为例:

##### (1) 综合虚无假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

##### (2) 备择假设

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3; \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3; \mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3; \mu_1 = \mu_3 \neq \mu_2$$

#### (三) 基本原理

##### 1. 方差的可分解性 (可加性)

方差分析把实验数据的总变异分解为若干个不同来源的分量,用平方和(SS)来表示。数据产生的总变异 (SS<sub>t</sub>) 由两部分组成:

(1) 组间差异 ( $SS_b$ ): 由于接受不同实验处理而造成的各组之间的变异, 主要指处理效应。

(2) 组内变异 ( $SS_w$ ): 由于实验中一些希望加以控制的非实验因素和一些未被有效控制的未知因素造成的变异, 主要指个体差异、随机误差。

即:  $SS_t = SS_b + SS_w$

## 2. 方差分析的原理

方差分析的功能在于分析实验数据中不同来源的变异对总变异的贡献大小, 从而确定自变量是否对因变量有重要影响。

若总变异是由实验处理造成的, 那么组间变异在总变异中占的比重就越大, 即自变量对因变量有影响; 反之, 若总变异由误差因素造成, 则组内变异应占较大比重, 则自变量对因变量的影响不大。

由于平方和 ( $SS$ ) 的大小还与实验处理数 ( $k$ ) 和每组被试的人数 ( $n$ ) 有关, 所以不能用来估计总体变异, 这时就引入了样本方差作为总体变异的无偏估计, 在方差分析中, 将样本方差称作均方, 用  $MS$  表示,  $MS = SS/df$ ,  $MS_b = SS_b/df_b$ ,  $MS_w = SS_w/df_w$ 。

那么, 方差分析就是要看组间均方 ( $MS_b$ ) 是否显著大于组内均方 ( $MS_w$ ), 即自变量是否对因变量有影响。用单侧  $F$  检验:

$$F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

查单侧  $F$  表进行  $F$  检验 (若算出来的值大于查出来的值, 则说明差异显著, 反之则不显著)。

## (四) 基本假定

1. 总体正态分布: 若有证据表明总体分布不是正态, 则可将数据做正态转化, 或进行非参数检验。

2. 变异来源独立: 不同来源的变异在意义上必须明确, 而且彼此要相互独立。

3. 各处理内方差齐性: 即各处理内的方差彼此应无显著差异, 这是方差分析中最重要的基本假定。方差齐性检验的方法采用哈特莱 (Hantley) 的最大  $F$  比率法:

$$F_{\max} = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}, \text{ 求出各样本中方差最大值与最小值的比, 通过查表判断。}$$

## (五) 基本概念

### 1. 因素和处理

#### (1) 因素

实验中的自变量, 有几个自变量就有几个因素。一般两个以上自变量的实验设计统称为多因素实验。一个因素的不同情况称为该因素的水平。

#### (2) 处理

一个特定的实验条件, 一个实验设计中处理数量等于不同自变量水平的乘积。

$2 \times 3$  的被试间实验设计中, 有 6 种处理水平的结合, 每个被试接受其中之一。

## 2.主效应和交互作用

### (1) 主效应

一个因素的不同水平引起的变异，即一个因素对因变量产生的影响。

例如：男性被试无论与同性同伴还是异性同伴在一起进食时，他们都比女性被试吃薄脆饼干的数量要多。

### (2) 交互作用

一个因素的水平在另一个因素的不同水平上变化趋势不一致的现象，即因素和因素相结合而对因变量产生的影响。如果两个因素彼此独立，即不管其中一个因素处于哪个水平，另一个因素的不同水平均值间的差异都保持一致，则不会产生交互作用。

例如：女性被试在异性同伴面前吃薄脆饼干的数量要比男性被试在异性同伴面前吃的数量更少，女性在同性同伴面前吃的饼干多于男性在同性同伴面前吃的饼干。

## 3.简单效应

一个因素的水平在另一个因素的某个水平上的变异，又称简单主效应、单纯主效应。

当交互作用显著时进行简单效应分析，例如：看女生在同性和异性条件下吃的饼干数量。

## 4.组间效应、组内效应和被试间差异

在非重复测量的实验设计（如完全随机设计）中：

(1) 组间效应：接受不同实验处理而造成的各组之间的变异。又称组间变异、处理效应、处理间变异、被试间效应。

(2) 组内效应：由于实验中一些希望加以控制的非实验因素和一些未被有效控制的未知因素造成的变异，主要由个体差异和随机误差组成。又称组内变异、误差效应、被试内效应。

(3) 被试间差异：即个体差异，又称区组效应。

## (六) 实验设计

### 1.组间设计

#### (1) 含义

不同被试接受自变量不同水平的处理，即“1个被试，1个处理”。类似于被试间设计、“独立组”设计、完全随机设计、非重复测量实验设计。实验中自变量叫被试间变量。

#### (2) 评价

优点：①处理间无污染（一个处理不会影响另一个处理）；②避免了顺序效应、练习效应、疲劳效应。

缺点：①被试数量需求较大；②不能排除因个体差异对实验结果造成的影响。

### 2.组内设计

#### (1) 含义

每个被试接受所有自变量水平的处理，即“1个被试，所有处理”。类似于被试内设计、“相关样本”设计、随机区组设计、重复测量实验设计。实验中自变量叫被试内变量。

#### (2) 评价

优点：①所需被试较少，实验设计方便；

②消除了被试个体差异对实验的影响；

③比被试间设计更敏感。

缺点：存在顺序效应、练习效应、疲劳效应。

### 3.混合设计

指一个实验设计中既有被试内变量又有被试间变量，也是重复测量实验设计的一种形式；实际上是同时进行几个实验，是一种最有实用价值的实验设计。

	组间设计	组内设计
定义	不同被试接受自变量不同水平的处理，即“1个被试，1个处理”。类似于被试间设计、“独立组”设计、完全随机设计、非重复测量实验设计。实验中自变量叫被试间变量。	每个被试接受所有自变量水平的处理，即“1个被试，所有处理”。类似于被试内设计、“相关样本”设计、随机区组设计、重复测量实验设计。实验中自变量叫被试内变量。
优点	①处理间无污染(一个处理不会影响另一个处理)； ②避免了顺序效应、练习效应、疲劳效应。	①所需被试较少，实验设计方便；②消除了被试个体差异对实验的影响；③比被试间设计更敏感。
缺点	①被试数量需求较大；②不能排除因个体差异对实验结果造成的影响。	存在顺序效应、练习效应、疲劳效应。
克服方法	被试分配方法：匹配与随机化	实验处理顺序：完全平衡与拉丁方

## 二、方差分析的基本步骤

### (一) 建立假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3; \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3; \mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3; \mu_1 = \mu_3 \neq \mu_2$$

### (二) 求平方和

1.总平方和是所有观测值和总平均数的离差平方和。

$$SS_t = \sum \sum X^2 - \frac{(\sum \sum X)^2}{N}$$

2.组间平方和是每组平均数与总平均数的离差平方再与该组数据个数的乘积总和。

$$SS_b = \sum \frac{(\sum X)^2}{n} - \frac{(\sum \sum X)^2}{N}$$

3.组内平方和是各被试的数值与组平均数之间的离差平方和。

$$SS_w = SS_t - SS_b = \sum \sum X^2 - \sum \frac{(\sum X)^2}{n}$$

### (三) 计算自由度

$$df_t = N - 1$$

$$df_b = k - 1$$

$$df_w = N - k$$

### (四) 计算均方

$$MS=SS/df$$

$$MS_b=SS_b/df_b$$

$$MS_w=SS_w/df_w$$

(五) 计算 F 值

$$F = \frac{MS_b}{MS_w} = \frac{SS_b/df_b}{SS_w/df_w}$$

(六) 查单侧 F 表进行 F 检验 (若算出来的值大于查出来的值, 则说明差异显著)

1. 若  $F > 1$ , 且落入临界区域, 则说明不同处理间差异显著, 即自变量对因变量有影响;
2. 若  $F = 1$ , 说明处理间差异不大;
3. 若  $F < 1$ , 说明总体变异大部分是由于误差因素导致的。

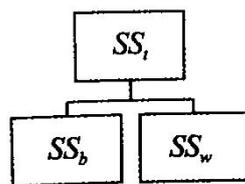
(七) 陈列方差分析表

变异来源	平方和	自由度	均方	F	临界值
组间	$SS_b$	$k-1$	$MS_b$	$F = \frac{MS_b}{MS_w}$	$F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$
组内	$SS_w$	$k(n-1)$	$MS_w$		
总变异	$SS_t$	$N-1$	$MS_t$		

### 三、完全随机设计的方差分析

把被试分为若干组, 每组分别接受一种实验处理, 有几种处理, 就相应地有几组被试, 即不同的被试接受不同自变量水平的实验处理。

(一) 单因素完全随机设计的方差分析



1. 平方和

$$SS_t = SS_b + SS_w$$

$$SS_t = \sum \sum X^2 - \frac{(\sum \sum X)^2}{N}$$

$$SS_b = \sum \frac{(\sum X)^2}{n} - \frac{(\sum \sum X)^2}{N}$$

$$SS_w = SS_t - SS_b = \sum \sum X^2 - \sum \frac{(\sum X)^2}{n}$$

2. 自由度

$$df_t = N - 1$$

$$df_b = k - 1$$

$df_w = N - k$

$N = nk$  (当每组人数相等时)

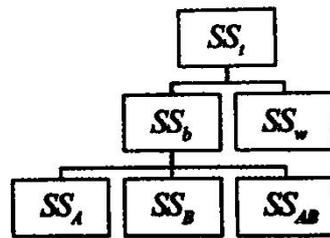
3. F 值

$$F = \frac{MS_b}{MS_w} = \frac{SS_b/df_b}{SS_w/df_w}$$

4. 字母含义

$SS_t$ : 总变异,  $SS_b$ : 组间变异 (处理效应),  $SS_w$ : 组内变异;  $N$ : 总人数,  $k$ : 实验处理数,  $n$ : 每组人数。

### (二) 两因素完全随机设计的方差分析



1. 平方和

$$SS_t = SS_b + SS_w = (SS_A + SS_B + SS_{AB}) + SS_w$$

$$SS_A = \sum_1^a \frac{(\sum_1^n \sum_1^b X)^2}{nb} - \frac{(\sum \sum X)^2}{N} \quad SS_B = \sum_1^b \frac{(\sum_1^n \sum_1^a X)^2}{na} - \frac{(\sum \sum X)^2}{N}$$

$$SS_{AB} = SS_b - SS_A - SS_B$$

2. 自由度

$$df_t = df_b + df_w = (df_A + df_B + df_{AB}) + df_w$$

$$df_t = N - 1, \quad df_b = k - 1, \quad df_w = N - k, \quad df_A = a - 1, \quad df_B = b - 1$$

$$df_{AB} = (a - 1)(b - 1), \quad N = nk$$

3. F 值

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_w} \quad F_B = \frac{MS_B}{MS_w} \quad F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_w}$$

4. 字母含义

$SS_A$ : A 因素的处理效应 (A 因素的主效应),  $SS_B$ : B 因素的处理效应,  $SS_{AB}$ : A 和 B 的交互作用,  $a$ : A 因素的水平数,  $b$ : B 因素的水平数。

## 四、单因素随机区组设计的方差分析

### (一) 随机区组设计

1. 含义

根据被试特点, 将被试分为几个区组, 再根据自变量的水平数在每一个区组内划分若干小区, 每一区组接受全部的实验处理。

2.被试分配

- (1) 一个被试作为一个区组，这时相当于被试内实验设计。
- (2) 一个组的被试是实验处理数的整数倍。
- (3) 一个组的被试以团体为单位。

总之，随机区组设计的原则为：同一区组内被试应尽量同质，区组间尽量异质。

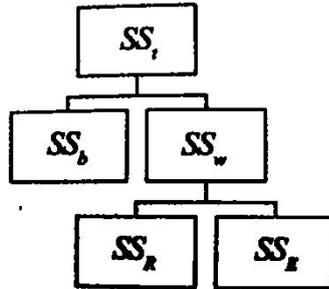
3.评价

与完全随机设计相比，最大的优点是考虑到个体差异（区组效应）并将这种差异从组内变异中分离，提高实验效率，可获得对处理效应的更加精确的估价。但是区组划分较困难，若不能保证区组内同质，则有更大的误差。

(二) 随机区组设计的方差分析

根据被试特点，将被试分为几个区组，再根据自变量水平在每一个区组内划分若干小区，同一区组随机接受不同处理；一个区组可以是一个人，也可以是一个团体，或者是实验处理的整数倍。

随机区组设计原则为：同一区组内被试尽量同质，区组间可以异质。



1.平方和

$$SS_T = SS_b + SS_w = SS_b + (SS_R + SS_E)$$

$$SS_R = \sum \frac{(\sum R)^2}{k} - \frac{(\sum \sum R)^2}{N}$$

$$SS_E = SS_w - SS_R$$

2.自由度

$$df_t = df_b + df_w = df_b + (df_R + df_E)$$

$$df_t = N - 1, df_b = k - 1, df_w = N - k = nk - k, df_R = n - 1, df_E = (n - 1)(k - 1)$$

3.F 值

$$F_b = \frac{MS_b}{MS_E} \quad F_R = \frac{MS_R}{MS_E}$$

4.字母含义

SSR：个体差异（区组效应），SSE：误差平方和（主要指随机误差），n：区组的个数。

变异来源	平方和	自由度	均方	F	显著性
组间	$SS_b$	$k-1$	$MS_b$	$F_b = \frac{MS_b}{MS_E}$	
区组	$SS_R$	$n-1$	$MS_R$		
误差	$SS_E$	$(n-1)(k-1)$	$MS_E$	$F_R = \frac{MS_R}{MS_E}$	
总变异	$SS_t$	$N-1$	$MS_t$		

	完全随机设计	随机区组设计
定义	把被试分为若干组，每组分别接受一种实验处理，有几种处理，就相应地有几组被试，即不同的被试接受不同自变量水平的实验处理。	根据被试特点，将被试分为几个区组，再根据自变量的水平数在每一个区组内划分若干小区，同一区组随机接受不同处理；一个区组可以是一个人，也可以是一个团体，或者是实验处理的整数倍。
优点	①分组简单；②控制被试流失所造成的误差。	①能提高实验的精确度；②提供估计遗失数据的方法。
缺点	由于随机取样不能保证各组真正等同，所以实验不仅包括随机误差还包括样本误差。	①分组繁琐；②实验结果处理较为复杂。③对实验处理数目有一定限制，一般不多于8。

### （三）协方差分析

#### 1. 协变量

指在实验设计阶段难以控制或无法控制的，但却对因变量产生影响的变量；协变量一般是线性变量，和因变量存在线性关系，且这种线性关系在自变量的各个水平上是一致的。例如：研究几种饲料对猪的增重效果，因为仔猪的初始体重不同，将影响到猪的增重，所以实验者希望控制仔猪的初始体重相同。但是，在实际中很难满足仔猪初始体重相同这一要求。那么仔猪的初始体重就是协变量。

#### 2. 协方差分析（analysis of covariance）

是在扣除协变量的影响后进行的方差分析，是把线性回归分析和方差分析结合在一起的事后统计分析方法。

协方差分析是一种常用的统计控制方法，是实验控制的一种辅助手段。经过这种矫正，实验误差将减小，对实验处理效应估计更为准确。

## 五、事后检验

### （一）概述

由于方差分析只能得到显著差异的结果，事后检验能够比较各组差异，发现差异具体产生在什么地方，到底哪一对或哪几对差异显著。需注意：

#### 1. 当方差分析的主效应显著后

（1）若每一个因素仅包括两个水平无须进行事后比较，只用直接报告两个均数并指出其高低关系。

（2）若因素的水平在三个以上，需进行事后多重比较来判断哪一对或哪几对的差异显

著，哪几对不显著。

2.当方差分析的交互作用显著后

(1) 需进行简单效应分析，分别检验一个因素在另一个因素的每一个水平上的处理效应，以便具体地确定它的处理效应在另一个因素的哪些水平上是显著的，在哪些水平上是不显著的。

(2) 检验每个主效应的意义不大，因为交互作用显著表明主效应是一个过度简化、没有考虑到其他因素的一种检验。

3.当方差分析的交互作用不显著

只要进行主效应检验即可。

(二) 具体方法

1. HSD 检验法：又叫 Tukey 真实检验，更敏感，统计检验力更强，要求各组容量相等。

2. N-K 检验：也称 q 检验。

3. Scheffe 检验：比较保守，适用于样本容量不等的情况。最大限度降低了第一类误差 $\alpha$ 水平，可能最安全，使用最为普遍。

4. Ducan 多距检验法

5. LSD (费舍的最小显著差异法)

(三) 效果量

1. 定义：效果量是测量自变量效果的量数，反应自变量和因变量的关联程度。

2. 常用效果量

(1)

$$d = \frac{\bar{x}_{\text{实验组}} - \bar{x}_{\text{对照组}}}{s_{\text{对照组}}}$$

实验组的平均数和对照组的平均数的差与对照组标准差的比率。

(2)

$$r_{pb}^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

点二列相关系数的平方，可测定两独立样本的效果量，也可以测定两相关样本的效果量。

(3)  $\eta^2$  是用来解释样本的自变量和因变量关联程度的描述性统计量。

(4)  $\omega^2$  是用来解释总体的自变量和因变量关联程度的指标，属于参数，每个 $\eta^2$ 都有一个对应的 $\omega^2$ 。